

1/f 雑音の発生機構

小林 隆 幸

滋賀医科大学物理学教室

The branching process model was applied to generate the time series by number of particles existing in a system and by counts recorded by a detector placed in the system. The power spectral density of the time series for particle number is characterized by a $1/f^2$ distribution, while the series made by time intervals between successive counts has a $1/f$ spectrum in a wide range of frequency. Similar results were also obtained by the model-independent simulations.

key words: time series, $1/f$ distribution, branching process

1. 緒 言

電気回路の雑音は白色雑音であって、そのパワースペクトルは周波数 f に依存せず、すべての周波数成分のスペクトル強度は同じであると考えられている。ところが、このことは周波数が小さいところでは成り立たず $1/f$ に比例するということが、1925年に Johnson によって見いだされた¹⁾。その後数多くの実験がなされ、現在では 10^{-6} Hz 位までスペクトルが $1/f$ に比例するということが分かっている²⁾。これは電流のゆらぎが、数十日という遠い過去の回路の状態と強い相関を持っているという、驚くべきことを意味している。

$1/f$ スペクトルは電気回路以外にも例えば、気温の変動³⁾、水晶の発振振動数のゆらぎ⁴⁾、高速道路上の自動車の間隔⁵⁾、音楽⁶⁾、宇宙における銀河の間隔⁷⁾、心拍周期のゆらぎ⁸⁾、神経繊維の膜電位のゆらぎ⁹⁾、など様々な現象に対して観測されている。この様にスペクトルが $1/f$ に比例するゆらぎを総称して $1/f$ 雑音という。

$1/f$ 雑音に関する理論は多数発表されているが¹⁰⁻¹⁴⁾、その大部分は $1/f$ スペクトルを十分に広い周波数帯域で再現できなかつたり、特定の現象に対してだけ成り立つモデルであつたり、あるいは余りにも技巧的であつたりする。ところが上に述べたように、この現象が様々な分野で観測されるということから、それを支配しているメカニズムはもっと単純で普遍的なものであろうと予想される。

事象を表す量 $x(t)$ のパワースペクトル密度 (PSD) が $1/f^\gamma$ ($\gamma \geq 0$) の形をしている場合、 γ が大きい程、短周期的な変動に比べて長周期的変動の方が相対的に大きくなるため、事象間の相関がいつまでも残る。この量の相関関数は $0 \leq \gamma < 1$ ならば

$$\langle x(t)x(t+\tau) \rangle = \begin{cases} \tau^{\gamma-1} & (0 < \gamma < 1) \\ \delta(\tau) & (\gamma = 0) \end{cases} \quad (1)$$

で、 t に依存しない。このような現象を定常的であるという。それに対して $\gamma > 1$ ならその相関関数は t に依存し、非定常的になる。したがって、 $1/f$ 雑音は定常と非定常の境界にある言わば半定常的な現象

に見られるということが分かる。著者は最近、分枝過程モデルを使って半定常的な数列を計算機により発生させる方法を提案した^{15),16)}。このモデルは前提が非常に単純で様々な現象に応用できるという意味で普遍性を持っている。そこでまずこのモデルを使って1/f雑音の発生機構を解釈してみる。

分枝過程モデルは1874年に家系の断絶に関する研究をするために初めて導入された¹⁷⁾。このモデルはその後 Kendall¹⁸⁾や Bellmann and Harris¹⁹⁾らによって発展させられ、生物集団の増殖、原子炉中での中性子数の変動、高エネルギー加速器によって得られる粒子スペクトルの研究など、多くの分野に応用されてきた。

2. 存在している粒子からなる数列の PSD

相関のある事象を考える場合、原子炉中で連鎖反応によって生まれる中性子あるいは中性子検出器からの信号を考えると分かり易い。それぞれの中性子は独立ではなく、連鎖反応を通じて他の中性子と相関を持っているので、中性子の数や検出器からの信号の分布はポアソン分布をしていない。これらに関する統計は分枝過程モデルによって記述できることが分っている²⁰⁾。そこで、分枝過程モデルを使って互いに相関ある事象を多数発生させ、これから得られる数列のスペクトルを計算してみる。

いま、粒子が吸収されて無くなったり、分枝を起こして増えるような体系を考える。体系中にランダムに粒子を放出する源があるとき、時刻 $t=0$ に k 個の粒子があったとして時刻 $t>0$ に n 個の粒子が存在する確立 $P_k(n, t)$ は文献(21)より

$$P_k(n, t) = \sum_{i=0}^n K_k^{(n-i)} \cdot Q_0^{(i)} \quad (2)$$

となる。ここで、 $K_k^{(n-i)}$ および $Q_0^{(i)}$ はそれぞれ時刻 $t=0$ に体系中に存在している k 個の粒子および $(0, t)$ 間にランダムな粒子源から放出される粒子の寄与を表していて、

$$K_k^{(n-i)} = \sum_{l=0}^{n-i} p(l, t) \cdot K_{k-i}^{(n-i-l)} \quad (3)$$

$$K_0^{(n-i)} = \delta_{0, n-i} \quad (3')$$

である。式(3)において $p(l, t)$ は時刻 $t=0$ に1個の粒子があったとして時刻 $t>0$ に l の粒子が存在する確率である。 $p(l, t)$ と式(2)の $Q_0^{(i)}$ は、粒子が二個に分枝する過程 (binary branching) の場合は厳密に計算でき、 $\beta = \lambda_c / \lambda_m \neq 1$ (λ_c, λ_m はそれぞれ吸収及び分枝の割合) の時は

$$p(l, t) = \begin{cases} \beta \cdot W & (l=0) \\ \left(\frac{\beta-1}{\beta-e^{-at}} \right)^2 \cdot e^{-at} & (l=1) \\ W \cdot p(l-1, t) & (l \geq 2) \end{cases} \quad (4)$$

$$W = \frac{1-e^{-at}}{\beta-e^{-at}}$$

$$Q_0^{(i)} = \begin{cases} \exp \left[S \frac{\beta-1}{\alpha} \cdot \ln \frac{\beta-1}{\beta-e^{-at}} \right] & (i=0) \\ \frac{S \frac{\beta-1}{\alpha} + i - 1}{i} \cdot W \cdot Q_0^{(i-1)} & (i \geq 1) \end{cases} \quad (5)$$

となる。ここで、 S はランダムに粒子を放出する粒子源の強度で、 $\alpha = \lambda_c - \lambda_m$ である。一方、 $\beta = 1$ のときは、

$$p(l, t) = \begin{cases} \left(1 + \frac{1}{\lambda_m t}\right)^{-1} & (l=0) \\ \frac{1}{(\lambda_m t)^2} \left(1 + \frac{1}{\lambda_m t}\right)^{-1} & (l=1) \\ \left(1 + \frac{1}{\lambda_m t}\right)^{-1} \cdot p(l-1, t) & (l \geq 2) \end{cases} \quad (4')$$

$$Q_0^{(i)} = \begin{cases} \exp\left[-\frac{S}{\lambda_m} \ln(1 + \lambda_m t)\right] & (i=0) \\ \frac{S}{\lambda_m} + i - 1 \left(1 + \frac{1}{\lambda_m t}\right)^{-1} \cdot Q_0^{(i-1)} & (i \geq 1) \end{cases} \quad (5')$$

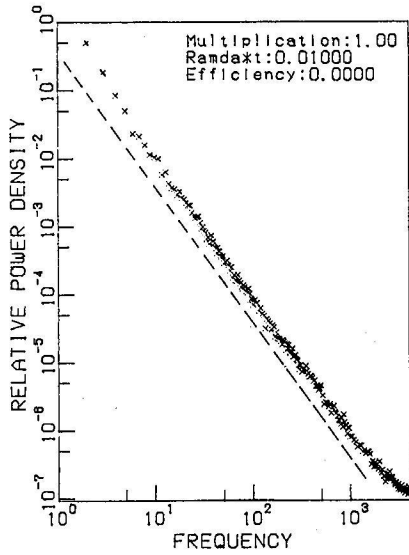
である。

モンテカルロ法を使い、式(2)から体系中に存在する粒子数を次々と計算して時系列を発生させた。この時、一番初めに体系中に存在する粒子数 (N_0) を10に固定した。また粒子数を有限の値に保つために $\beta > 1$ では $S = \alpha N_0$ とし、 $\beta = 1$ では $S = 0$ とした。これは $\beta = 1$ の時 $S > 0$ とすると粒子数の平均値は時間と共に増大するからである。粒子数の時系列の PSD を図1, 2および3に示す。図2と図3での時間 t は同じになるように αt の値を選んである。図の中で増殖率 μ は β の逆数を表している。図から分かるように、 $\mu = 1$ のときは PSD は $1/f^2$ の分布をする。 $\mu < 1$ のときは、高周波領域では $1/f^2$ の変化をするが周波数が小さくなると一定値に近づく。しかも μ が小さい程この一定値である領域が広がる。これは個々の分枝連鎖が粒子の吸収によって途切れ、時間的に離れた粒子間の相関が非常に弱くなるからである。 $\mu = 0$ の時には分枝過程が起こらないが、ある時刻に体系中に存在している粒子数はその直後の粒子数に強く影響を与えるから、高周波領域で $1/f^2$ の変化が現れるものと考えられる。このようにある時刻 t_1, t_2 に体系中に存在する粒子数の間の相関は、時間差 $t_2 - t_1$ が小さいときは強くかつ非定常的で、時間差が大きくなると弱くなる。この相関の強い範囲は μ が大きくなると共に広くなり、 $\mu = 1$ では全周波数領域で強い相関が現れ、現象は非定常的となる。

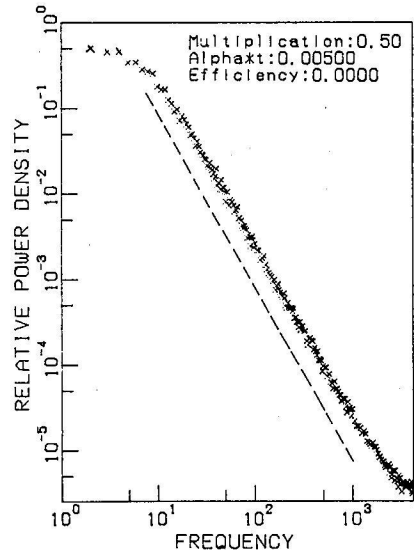
3. 粒子検出の間隔からなる数列の PSD

上に示すように分枝過程が起こっている体系中の粒子数の時系列は $1/f^2$ 分布をし、 $1/f$ 分布とはならない。これは、粒子数の時系列では事象間の相関が強いからである。それに対して図4に示すような個々の事象が起こる時間間隔 (図では粒子検出の時間間隔を考えている) にはそれほど強い相関がないであろうと予想される。何故なら個々の事象は物理的な時間間隔とは異なった、連鎖に添うパスを通じて相関を持っている。しかもこのパスの長さ (相関の強さに関係する) はその事象の物理的な時間間隔とは確率的な対応関係しか持っていないからである。つまり、時間間隔が短い事象が長いものと比べて強い相関を持っているとは必ずしも言えない。そこで次に、体系中に粒子の検出器があると考え、粒子検出という事象の時間間隔を計算する。

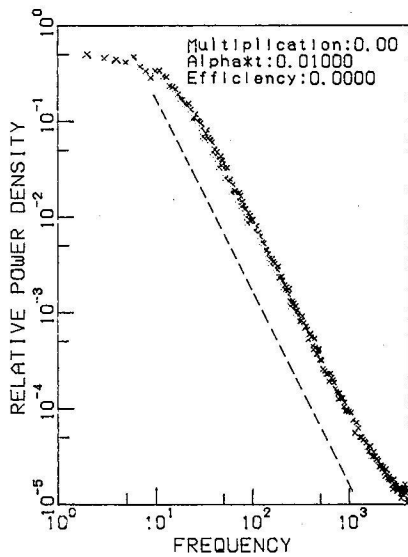
時刻 $t = 0$ に k 個の粒子があり、 $(0, t)$ 間に m 個の粒子が検出され、時刻 $t > 0$ に n 個の粒子が



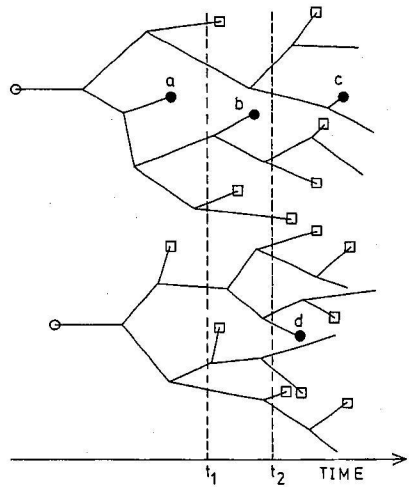
第1図 $\mu = 1, \lambda_{mt} = 0.01$ の場合における存在する粒子数からなる時系列のPSD. 点線は $1/f^2$ 分布を表す.



第2図 $\mu = 0.5, at = 0.005$ の場合における存在する粒子数からなる時系列のPSD. 点線は $1/f^2$ 分布を表す.



第3図 $\mu = 0, at = 0.01$ の場合における存在する粒子数からなる時系列のPSD. 点線は $1/f^2$ 分布を表す.



第4図 分枝過程の連鎖. ○印はランダム粒子源から体系中に放出された粒子, □印は粒子の吸収, ●印は粒子の検出を表し, これらをつなぐ実線は粒子の軌跡である. この例では, 時刻 t_1, t_2 における体系中に存在する粒子数はそれぞれ8および13である. 粒子検出 a, b, c の間には分枝過程を通じて相関があるが, これらと d との間には相関はない. また a, b 間の時間間隔と b, c 間のそれとはあまり変わらないが, a, b 間より b, c 間の方がはるかに長い連鎖のパスを通じてつながっているため, 相関が弱い.

存在する確率 $P_k(m; n, t)$ の一般的な形を示すのは困難であるが、 $m=0$ の場合には式(2)と同様な形で表すことができ、

$$P_k(0; n, t) = \sum_{i=1}^n K_k^{(0, n-i)} \cdot R_0^{(0, i)} \quad (6)$$

となる²¹⁾。ここで、粒子が2個に分枝する過程を考え、検出器が吸収型のものであるとすると

$$R_0^{(0, i)} = \begin{cases} \exp \left[(\xi - 1)St + \frac{\beta - 1}{\alpha} S \cdot \ln \frac{\eta - \xi}{\eta - \xi e^{-\theta t}} \right] & (i=0) \\ \frac{S \frac{\beta - 1}{\alpha} + i - 1}{i} \cdot V \cdot R_0^{(0, i-1)} & (i \geq 1) \end{cases} \quad (7)$$

$$V = \frac{1 - e^{-\theta t}}{\eta - \xi e^{-\theta t}}$$

であり、 θ , η , ξ は

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{\alpha}{\beta - 1} \sqrt{(\beta - 1)^2 + 4 \beta \varepsilon} \\ \eta &= \frac{1}{2} \left(\beta + 1 + \sqrt{(\beta - 1)^2 + 4 \beta \varepsilon} \right) \\ \xi &= \frac{1}{2} \left(\beta + 1 - \sqrt{(\beta - 1)^2 + 4 \beta \varepsilon} \right) \\ & (\varepsilon = \lambda_d / \lambda_c) \end{aligned}$$

である。上の式で、 λ_d は粒子が検出される割合を示す。 $\beta=1$ ならば、これらは

$$\theta = 2 \sqrt{\varepsilon} (\lambda_m), \quad \eta = 1 + \sqrt{\varepsilon}, \quad \xi = 1 - \sqrt{\varepsilon}$$

となる。一方、式(6)の $K_k^{(0, n-i)}$ は

$$K_k^{(0, n-i)} = \sum_{l=0}^{n-i} p(0; l, t) \cdot K_{k-1}^{(0, n-i-l)} \quad (8)$$

$$K_0^{(0, n-i)} = \delta_{0, n-i} \quad (8')$$

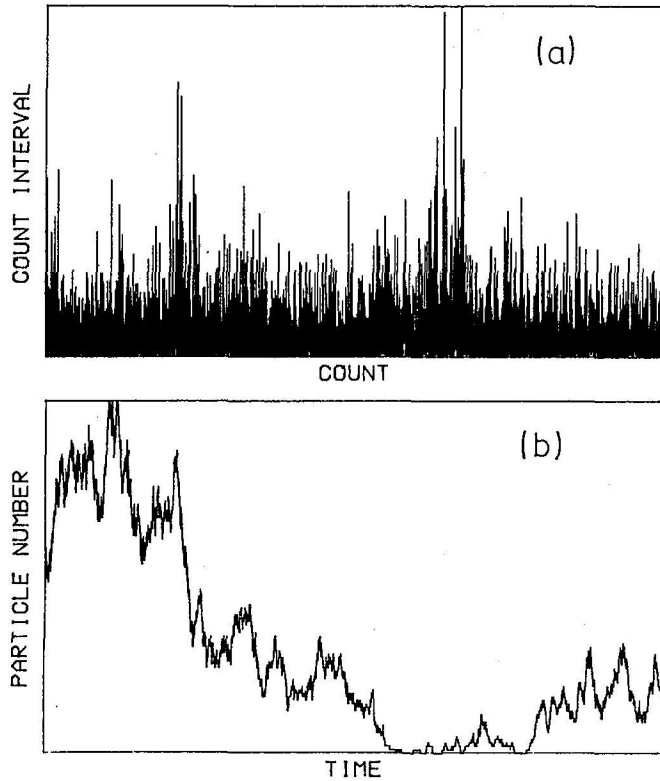
と表される。ここで、 $p(0; l, t)$ は時刻 $t=0$ に1個の粒子があったとして $(0, t)$ 間に粒子が検出されず時刻 $t>0$ に l 個の粒子が存在する確率で、

$$p(0; l, t) = \begin{cases} \eta \xi V & (l=0) \\ \frac{(\eta - \xi)^2 e^{-\theta t}}{(\eta - \xi e^{-\theta t})^2} & (l=1) \\ V \cdot p(0; l-1, t) & (l \geq 2) \end{cases} \quad (9)$$

によって与えられる。 $P_k(0; n, t)$ が1に非常に近い場合には、式(2), (6)から

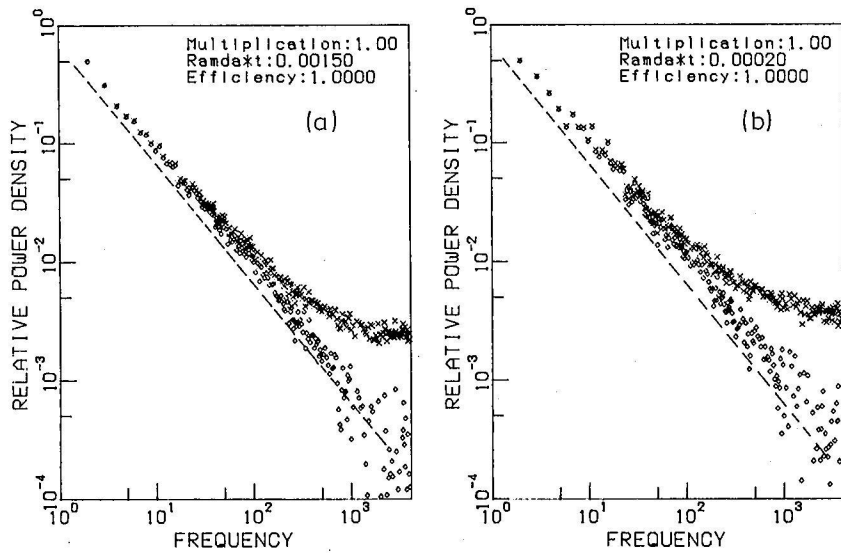
$$P_k(1; n, t) \doteq P_k(n, t) - P_k(0; n, t) \quad (10)$$

と近似することが出来る。 $m \neq 0, 1$ の時は $P_k(m; n, t) \sim 0$ としてよい。

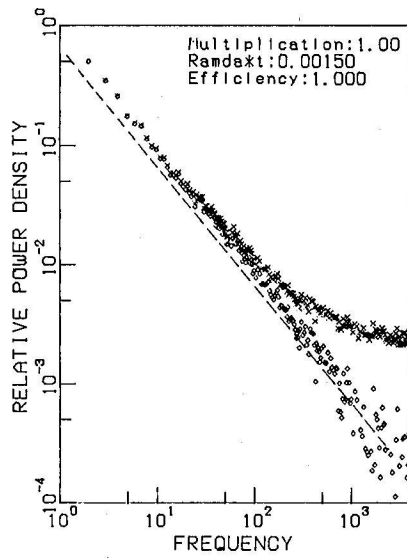


第 5 図 $N_0=10$, $\mu=1$, $\lambda_{mt}=0.0015$, $\varepsilon=1$ の場合における粒子検出の間隔からなる数列(a)および図 1 と同じ条件での時系列(b).

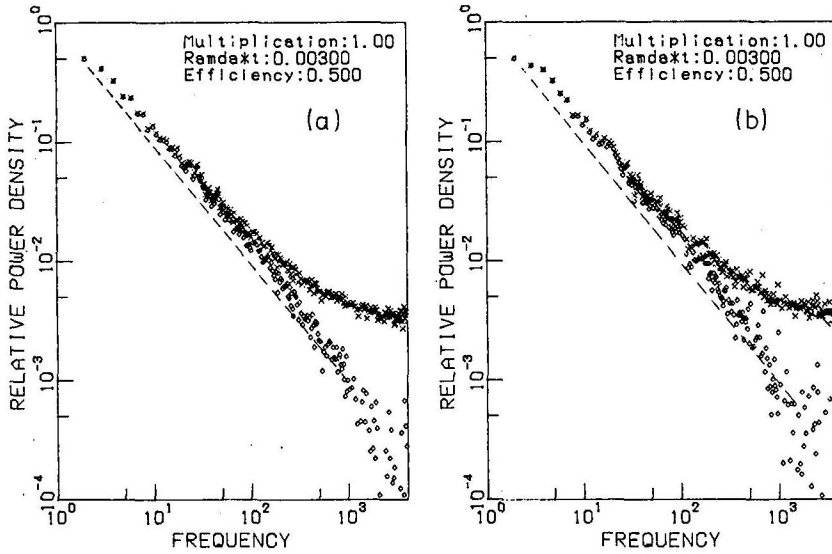
式(2), (6), (10)から次々と続いた微小な時間間隔での粒子検出の有無を計算し、これにより粒子検出の間隔からなる数列を作った。その際、粒子源の強さ S の扱いは前の計算と同じにした。この様にして得られた数列の一部が図 5 に粒子数の時系列と比較して示されている。前者は後者に比べてより間欠的であることが分かる。図 6 には粒子検出間隔からなる数列の PSD を示す。高周波領域で PSD は一定値(白色雑音)に近づくので、PSD がほぼ一定になっている部分のスペクトル密度を平均し、元の PSD から差し引いたものも図に示してある。これは三桁以上の範囲に渡って $1/f$ 分布をしているのが分かる。 N_0 のスペクトルへの影響を見るために、図 6(a)で $N_0=1$ とした場合の結果を図 7 に示すが、スペクトルの変化は認められない。ところが $\varepsilon < 1$ の時には N_0 のスペクトルへの影響が認められる。すなわち、図 8 に示すように $N_0=10$ の時には低周波領域で PSD が $1/f$ 分布から予想されるより少し小さくなる。これは、図 4 に模式的に示したように、 $N_0 \neq 1$ である為に相関を持たない連鎖が体系中にいくつか存在し、これによって粒子検出の間隔に相関を持たないものが混ざってくるためであろうと思われる。 $\varepsilon=1$ の時には粒子が吸収される事象をすべて見ているが、 $\varepsilon < 1$ の時にはそれらの一部だけを見ているので二つ並んだ粒子検出事象が異なった連鎖に属することが多くなるのであろう。図 9 は $\mu < 1$ の時の PSD であり、周波数が低くなれば一定値に近づく。その理由は粒子数からな



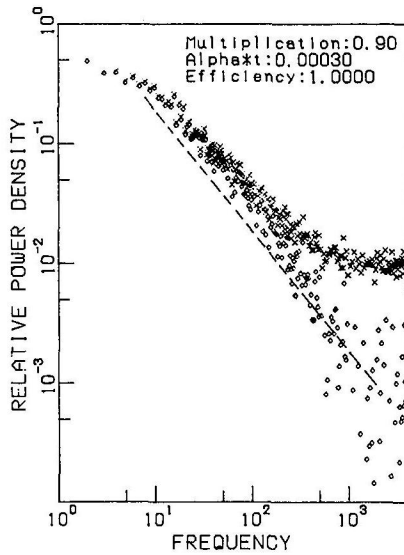
第6図 $N_0=10$, $\mu=1$, $\lambda_{mt}=0.0015$, $\varepsilon=1$ の場合(a)および $N_0=10$, $\mu=1$, $\lambda_{mt}=0.0002$, $\varepsilon=1$ の場合(b)における粒子検出の間隔からなる数列のPSD. \times 印で表した点は数列から計算したPSDで, \diamond 印で表した点はそれから白色雑音成分を差し引いたものである. 点線は $1/f$ 分布を表す.



第7図 $N_0=1$, $\mu=1$, $\lambda_{mt}=0.0015$, $\varepsilon=1$ の場合における粒子検出の間隔からなる数列のPSD. \times 印, \diamond 印で表した点の意味は図6と同じである. 点線は $1/f$ 分布を表す.



第 8 図 $\mu = 1$, $\lambda_{mt} = 0.003$, $\varepsilon = 0.5$ の場合における粒子検出の間隔からなる数列の PSD. (a): $N_0 = 1$, (b): $N_0 = 10$. \times 印, \diamond 印で表した点の意味は図 6 と同じである. 点線は $1/f$ を表す.

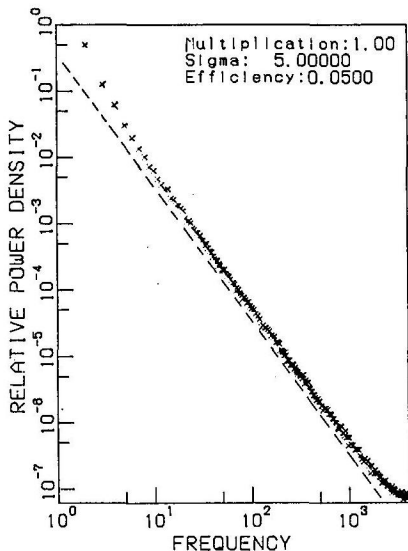


第 9 図 $N_0 = 10$, $\mu = 0.9$, $at = 0.0003$, $\varepsilon = 1$ の場合における粒子検出の間隔からなる数列の PSD. \times 印, \diamond 印で表した点の意味は図 6 と同じである. 点線は $1/f$ 分布を表す.

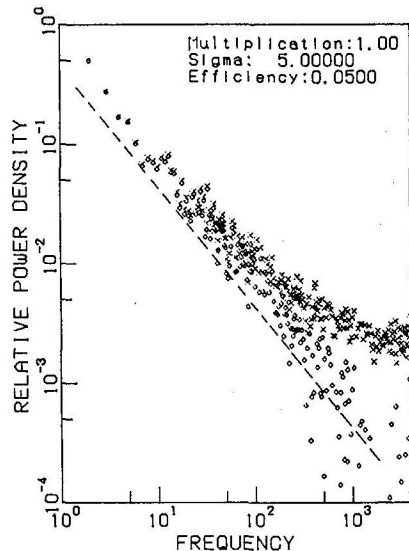
る数列の場合と同じである。

4. 考察と結論

上のシミュレーションでは、存在している多くの粒子の中から検出される粒子のみに注目することによって1/f スペクトルを持った数列を発生することが出来た。この場合吸収型の検出器を考えたが、分枝を起こしたとき検出されるような式を組立て、上と同様の計算をしても同じような結果が得られるものと予想される。すなわち、長時間平均を取ると粒子数に増減がない体系中において、なにか特定の事象のみを検出した場合にはいつも同様の結果を得ることができないのではないかと推定される。そこで次に、この様な結果が分枝過程と密接な関係があるのかどうかを調べるために、分枝過程モデルとは無関係に体系中の粒子数を計算し、その一部が検出されるとしたときの粒子検出の時間間隔からなる数列を作り、そのPSDを求める。図6～8から分かるように、1/f スペクトルが現れるのは $\mu = 1$ 、すなわち体系が臨界状態にあるときだけである。これはある時刻における粒子数が、それに続く微少時間の間に、増加する確率と減少する確率は等しい、ということの意味している。そこである時刻から次の時刻に移る場合の粒子数の変化は、現在の粒子数を中心にしたガウス分布をしているとし、粒子の検出確率は現在の粒子数に比例すると仮定して、粒子数および粒子検出の時間間隔からなる数列を作った。ガウス分布の標準偏差を5.0とし、シミュレーションを粒子数5000から始めて得られた数列のPSDを図10、11に示す。これらの場合もやはり広い周波数領域にわたって1/f² スペクトル、1/f スペクトルが見られる。このことから1/f スペクトルを持った数列が現れるには、分枝過程などの特定の過程が重要なのではなく、単に粒子が増加する確率と減少する確率が等しい過程が起こっ



第10図 粒子数の増減がガウス分布で表される場合における粒子数からなる時系列のPSD. 点線は1/f²分布を表す。



第11図 粒子数の増減がガウス分布で表される場合における粒子検出の間隔からなる数列のPSD. ×印、◇印で表した点の意味は図6と同じである。点線は1/f分布を表す。

ていればよいということが分かる。

以上の結果から次のようなことが明らかになった。1/f スペクトルを持つ現象は互いに強い相関関係を持った多くの事象の中から特定の事象を1つ1つ観測したときに見られる、と云うことが出来る。あるいは、次のように考えても良いかもしれない。すなわち PSD が $1/f^2$ 分布を持つ現象は非定常的であるから、非定常な現象の中から特定の事象を1つ1つ観測したときに、1/f スペクトルを持った現象が見られる。つまり、1/f スペクトルは対象としている体系が非定常状態にあり、しかも体系中の事象をすべて観測するのではなくある特定の事象のみを観測した場合に得られるということである。

参考文献

- 1) J.B. Johnson, Phys. Rev., 26, 71 (1925).
- 2) M.A. Caloyannides, J. Appl. Phys., 45, 307 (1974).
- 3) J.J. Brophy, Naval Res. Rev. 23, 8 (1970).
- 4) A. J. Owens and R. Tokipii, J. Geophys. Res., 77, 6639 (1972).
- 5) T. Musha and H. Higuchi, Japan. J. Appl. Phys., 15, 1271 (1976).
- 6) R.F. Voss and J. Clarke, Nature, 258, 317 (1975).
- 7) E.J. Groth and P.J.E. Peebles, Astrophys. J., 217, 385 (1977); A.S. Szalay and D.N. Schramm, Nature, 314, 718 (1985).
- 8) M. Kobayashi and T. Musha, IEEE Trans., BME-29, 456 (1982).
- 9) T. Musha, H. Takeuchi and T. Inoue, IEEE Trans., BME-30, 194 (1983).
- 10) B. Pellegrini, Phys. Rev. B, 22, 4684 (1980); *ibid.*, 24, 7071 (1981); *ibid.*, 26, 1791 (1982).
- 11) F. Grueneis, Physica, 123A, 149 (1984).
- 12) R. Rammal, C. Thnnous, P. Breston and A.-M. S. Tremblay, Phys. Rev. Lett., 54 1718 (1985).
- 13) H. Furukawa, Phys. Rev. A, 34, 2315 (1986).
- 14) T. Geisel, A. Zacherd and G. Radons, Phys. Rev. Lett., 59, 2503 (1987) and Z. Phys. B, 71, 117 (1988).
- 15) T. Kobayashi, J. Phys. A, 22, L931 (1989).
- 16) T. Kobayashi, 統計数理, 37, 99 (1989).
- 17) H.W. Watson and F. Galton, J. Antrop. Inst., 4, 138 (1874).
- 18) D.G. Kendall, Ann. Math. Stat., 19, 1 (1948).
- 19) R. Bellman and T.E. Harris, Ann Math., 55, 280 (1952).
- 20) T. Kobayashi, J. Nucl. Sci. Tech., 5, 145 (1968).
- 21) T. Kobayashi, J. Phys. A, 21, 3723 (1988).